

## Relatório Final

Título do projeto de pesquisa: Modelagem de materiais viscoelásticos como absorvedores de vibrações estruturais

Bolsista: Ravena Elise Cortez

Orientador(a): Carlos D'Andrade Souto

Período a que se refere o relatório: Agosto de 2013 a Julho de 2014

### Resumo

O objetivo do trabalho é o estudo de modelos analíticos e numéricos para a análise de estruturas com camadas de materiais visco-elásticos utilizados no setor aeroespacial como amortecedores de vibração. Para isso serão estudados modelos analíticos e métodos de modelagem de estruturas com camadas de materiais viscoelásticos pelo método dos elementos finitos, continuando o estudo do comportamento de materiais visco – elásticos realizado pela bolsista. Estudamos estruturas metálicas com camada de material viscoelástico e uma camada metálica adicional (vigas sanduíche). Os resultados experimentais obtidos anteriormente pela bolsista foram utilizados na validação dos métodos estudados e implementados, pois não foi possível a realização de novos testes para fins de comparação com os resultados encontrados nos métodos analíticos.

### 1. Introdução

Aeronaves e veículos espaciais são submetidos a elevados níveis de vibrações, seja de origem estrutural como a causada por movimentação de partes móveis de motores, seja de origem acústica como a causada pela exaustão de gases em alta velocidade. Estes veículos possuem estruturas compostas em boa parte por painéis que são bastante sensíveis a vibrações e oscilações da pressão externa. No caso de veículos lançadores de satélites, os níveis de pressão sonora durante a decolagem podem atingir valores entre 140 e 160 dB. O ruído é transmitido para as cavidades internas do veículo por meio da vibração dos painéis estruturais. Tal nível de ruído pode afetar a integridade de equipamentos eletrônicos embarcados ou mesmo da carga útil.



Com o objetivo de reduzir vibrações, camadas de materiais viscoelásticos, cujas propriedades como módulo de elasticidade e amortecimento variam com a frequência de excitação, são aplicadas em partes dessas estruturas a fim de reduzir os níveis de vibração e ruídos internos. Ensaios que permitem obter o módulo de elasticidade e amortecimento de materiais viscoelásticos em função da frequência consistem em obter as funções de resposta em frequência de vigas de aço ou alumínio engastadas e recobertas com o material que se deseja analisar. A viga é excitada na extremidade livre preferencialmente de forma que não haja contato físico entre o dispositivo excitador e a viga. O módulo de elasticidade e o amortecimento da viga composta (metal+viscoelástico+metal) são calculados nos picos da função de resposta em frequência obtida por meio das equações do método dos elementos finitos.

Estruturas em sanduíche três camadas, podem ser esquematizadas como a composição de dois elementos metálicos externos ligados por um intercalar viscoelástico e são utilizados em muitas aplicações de engenharia. Intercamadas viscoelásticas são particularmente eficientes em adição a uma estrutura de amortecimento. Neste trabalho, o comportamento dinâmico de uma viga sanduíche composto por duas camadas elásticas lineares externas de mesma espessura unidos por uma camada de material viscoelástico é analisada. A rigidez flexural composta é usado em um modelo de feixe implementado num código de elemento finito escrito numa rotina MATLAB. Um movimento prescrito é aplicado a uma ponta da viga e a resposta de frequência na outra ponta é avaliada numericamente. Os resultados numéricos são comparados com as curvas obtidas experimentalmente.

Pequenas variações no ensaio descrito em [1] foram propostas engastando a viga no “shaker” pela posição central [3] ou por uma extremidade [4] e excitando-a por deslocamentos prescritos. Optamos por utilizar a segunda alternativa para a execução dos ensaios com a viga sanduíche (metal+viscoelástico+metal) e a resposta em frequência da viga foi calculada analiticamente utilizando a equação da viga de Euler- Bernoulli, de forma semelhante à mostrada em [3] e pelo método dos elementos finitos.

## 2. Material e métodos

Nos projetos anteriores, foram realizados ensaios nos quais uma viga metálica teve uma de suas extremidades conectada firmemente a um “shaker”. A resposta em frequência da viga ao deslocamento de sua extremidade presa ao vibrador foi medida por um acelerômetro posicionado em sua extremidade oposta.



Fig.1 - Viga presa ao “shaker”



Fig.2 – Detalhe da viga sanduíche  
(metal+viscoelástico+metal)

Na rotina feita em MATLAB, para o modelo em elementos finitos da viga, considerou-se a teoria de viga de Euler-Bernoulli e elementos finitos lineares com 2 graus de liberdade por nó (deslocamento vertical e deslocamento rotacional), como mostrado na figura a seguir.

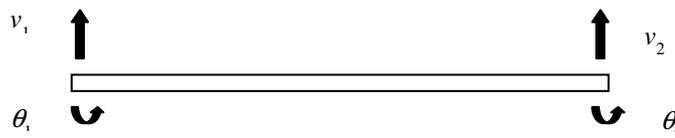


Fig. 3-Graus de liberdade de um elemento de viga com 2 nós

A equação dinâmica de uma estrutura discretizada pelo método dos elementos finitos é dada por [2]:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

Onde  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e  $\{u\}$  e  $\{F\}$  são os vetores de deslocamentos e forças nodais. Na equação acima as forças externas são contabilizadas no vetor  $\{F\}$ . As matrizes de massa e rigidez são respectivamente:

$$[M] = \frac{\rho H b L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{simétrica} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{simétrica} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Onde:

$\rho$ : massa específica

$H$ : espessura da vigas

$b$ : largura da viga

$L$ : comprimento da viga

$I$ : Segundo momento de área da seção transversal da viga

$E$ : Módulo de elasticidade

A equação (1) pressupõe que o amortecimento é do tipo viscoso. Contudo o modelo de amortecimento estrutural permite incluir o fator de perda ( $\eta$ ) obtido experimentalmente. Em materiais viscoelásticos o módulo de elasticidade é complexo e varia com a frequência e o fator de perda é a razão entre a parte imaginária e real do módulo de elasticidade, ou seja [2]:

$$E^*(\omega) = E_R(\omega) + E_I(\omega) = E_R(\omega)(1 + j\eta(\omega)) \quad (4)$$

Onde  $\omega$  é a frequência de oscilação,  $E_R$  é a parte real módulo de elasticidade,  $\eta$  é o amortecimento (fator de perda) da estrutura e  $E^*$  é o módulo de elasticidade complexo.

A inclusão do amortecimento complexo faz com que a matriz de rigidez também se torne complexa:

$$[K(\omega)]^* = [K](1 + j\eta(\omega)) \quad (5)$$

Logo, considerando-se o amortecimento do tipo estrutural (incluído pela parte imaginária de  $[K]$ ), a equação discretizada de uma estrutura com amortecimento estrutural será então:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K(\omega)]^*\{u\} = \{F\} \quad (6)$$

No caso de uma viga sanduíche uma possível estratégia de modelagem seria utilizar em um modelo convencional de viga uma rigidez flexural equivalente, ou seja, calcula-se um produto  $EI$  que leve em conta a influência das três camadas da viga:

$$EI = \frac{E_1 H_1^3}{6} + E_1 H_1 (H_1 + H_2)^2 \frac{G_2^*}{E_1 H_1 H_2 \bar{\beta}^2 + 2G_2^*} \quad (7)$$

Onde

$$\bar{\beta}^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Onde  $E_1$  é o módulo de Young da viga base,  $I_1$  é o momento de inércia da secção transversal da viga base,  $H_1$  é a espessura da viga base,  $E_2$  é o módulo de Young do material viscoelástico,  $I_2$  é o segundo momento área da secção transversal do material de viscoelástico,  $H_2$  é a espessura do material viscoelástico,  $A$  é a área da secção transversal e  $\rho$  é a massa específica da viga. A secção transversal da viga é mostrada na Fig. 4

O módulo de cisalhamento complexo do material viscoelástico ( $G_2^*$ ) é:

$$G_2^* = G_2(1 + j\eta_2) \quad (8)$$

Onde:

$$j = \sqrt{-1}$$

$\eta_2$  – Fator de perda do material viscoelástico

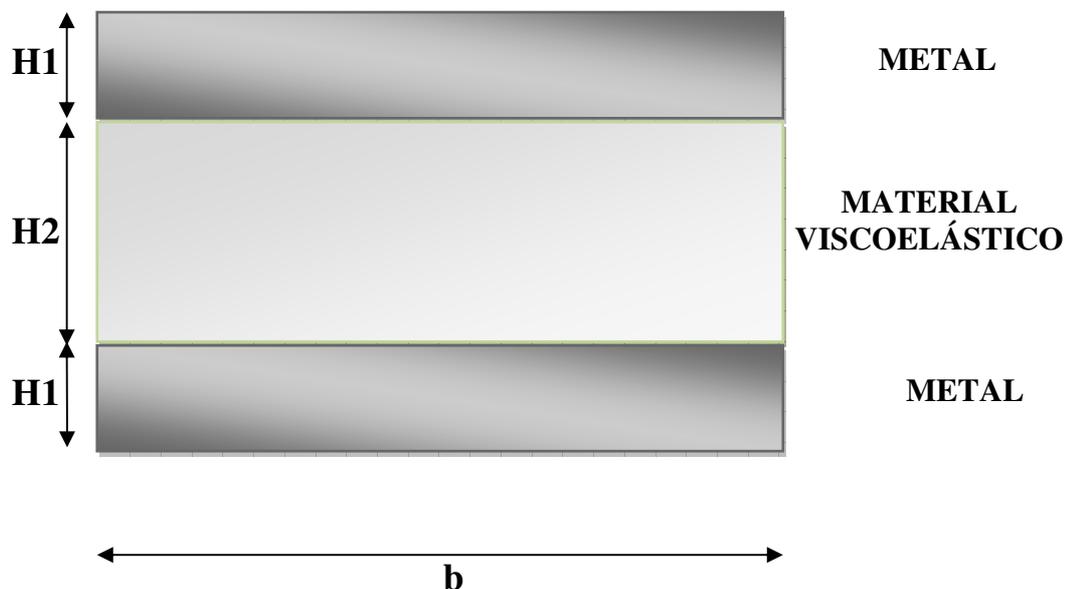


Figura 4 – Seção transversal de uma viga sanduíche composta de metal, viscoelástico e metal

No caso em que deslocamentos prescritos são aplicados à estrutura,  $\{F\}$  será um vetor nulo e a excitação será aplicada à estrutura pelos deslocamentos prescritos.

Para incluir os deslocamentos prescritos na eq.(6) podemos considerar o vetor de deslocamentos  $\{u\}$  como tendo a forma:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Onde  $\{u_1\}$  contém os deslocamentos nodais prescritos (conhecidos) e  $\{u_2\}$  contém os deslocamentos nodais desconhecidos. Combinando-se as equações (6) e (9), a equação (6) pode ser re-escrita como [3]:

$$\begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_1\} \\ \{\ddot{u}_2\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{11}]^* & [K_{12}]^* \\ [K_{21}]^* & [K_{22}]^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Isolando-se os deslocamentos prescritos para o lado direito da equação (10), chega-se a:

$$[M_{22}]\{\ddot{u}_2\} + [K_{22}]^*\{u_2\} = -[M_{21}]\{\ddot{u}_1\} - [K_{21}]^*\{u_1\} = \{F_{eq}\} \quad (11)$$

Onde  $\{F_{eq}\}$  é a força equivalente. Considerando os movimentos harmônicos com frequência  $\omega$ , a equação (11) pode ser re-escrita como:

$$\left(-\omega^2[M_{22}] + [K_{22}]^*\right)\{u_2\} = \left(\omega^2[M_{21}] - [K_{21}]^*\right)\{u_1\} = \{F_{eq}\} \quad (12)$$

Finalmente, os deslocamentos nodais contidos no vetor  $\{u_2\}$  podem ser calculados por:

$$\{u_2\} = \left(-\omega^2[M_{22}] + [K_{22}]^*\right)^{-1} \left(\omega^2[M_{21}] - [K_{21}]^*\right)\{u_1\} = \{F_{eq}\} \quad (13)$$

Para estudar o efeito da excitação por deslocamentos prescritos, foi calculada a resposta em frequência da viga sanduíche excitada por um deslocamento prescrito harmônico (Eq. 13). A excitação foi aplicada em uma extremidade e a resposta calculada na extremidade oposta.

Os dados do modelo de elementos finitos, os valores utilizados para o cálculo da resposta em frequência e as propriedades da viga são mostrados nas tabelas 1, 2 e 3 a seguir.

Tabela 1 - Dados do modelo de elementos finitos

Tipo de elemento	Viga (Euler – Bernoulli) linear (2 nós)
Número total de elementos	5
Número total de nós	6

Tabela 2 - Dados do excitação harmônica para o cálculo da resposta em frequência

Frequência inicial	1 Hz
Frequência final	3001 Hz
Passo	1 Hz

Tabela 3 – Propriedades da viga

Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Comprimento	L	120	mm
Módulo de elasticidade	E	$2,1 \times 10^{11}$	$\text{N/m}^2$
Massa específica	$\rho$	7700	$\text{Kg/m}^3$
Espessura	H1	0,5	mm
Largura	b	11,80	mm

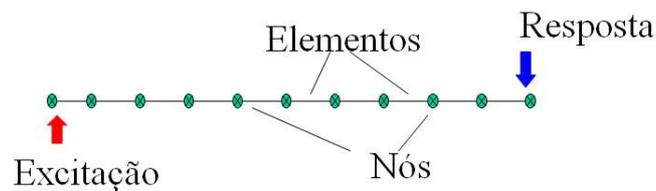


Fig 5 - Modelo de elementos finitos da viga

As curvas da parte real do módulo de elasticidade ( $E_R(\omega)$ ) e do fator de perda do material viscoelástico ( $\eta(\omega)$ ) em função da frequência foram obtidas de [6].

### 3. Resultados

A Fig.6 mostra as curvas calculadas analiticamente, pelo método dos elementos finitos e obtida experimentalmente para a viga sandwich.

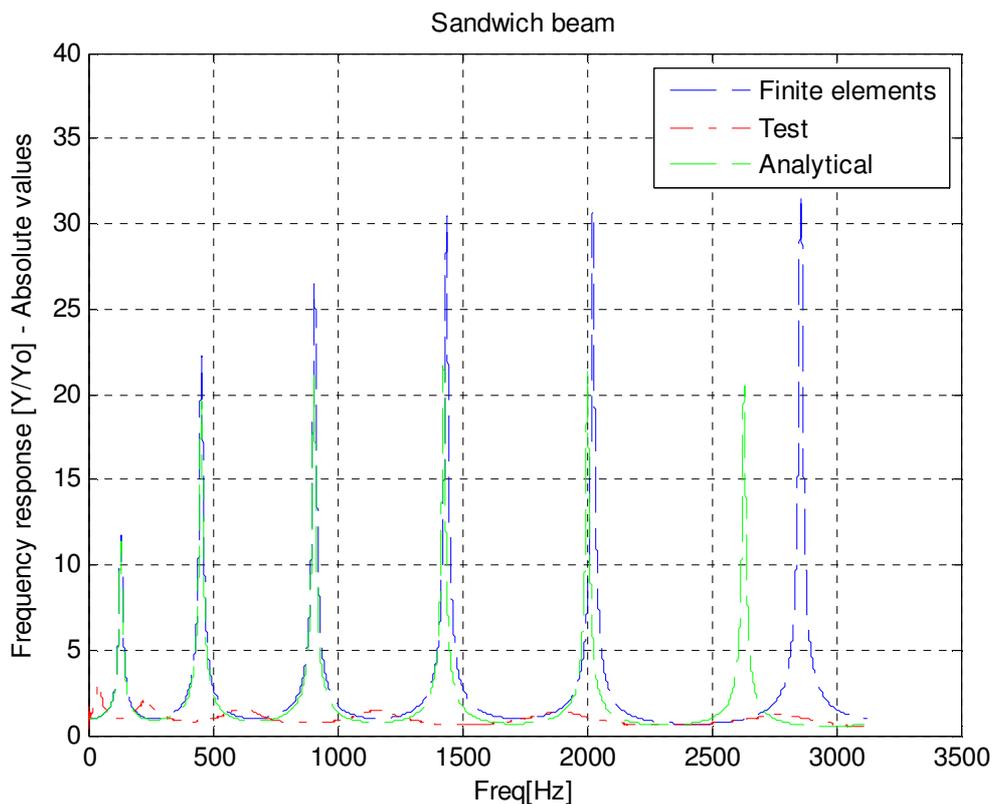


Figura 6 – Respostas em frequência obtidas analiticamente, numericamente (método dos elementos finitos) e experimentalmente para a viga “sanduíche”

A Fig.6 mostra as funções de transferência relacionando o deslocamento aplicado em uma ponta da viga e o deslocamento medido/calculado na outra ponta da viga calculadas analiticamente, pelo método dos elementos finitos e obtida experimentalmente.

Utilizando as equações obtidas em [7], obtivemos, através de uma rotina em MATLAB, um  $D_{tot}$ , que é o valor total da rigidez flexural por unidade de largura da viga sandwich e um valor  $y_0$ , que é a coordenada da camada viscoelástica.

#### 4. Conclusões

Percebe-se a concordância na frequência dos picos nos métodos analítico e dos elementos finitos. A curva experimental, porém, mostrou-se bastante diferente.

Utilizando as equações obtidas em [7], chegamos a uma margem de erro alta, em relação aos resultados das frequências. Pretendíamos estudar as razões da não concordância dos modelos analítico e de elementos finitos com o experimental, refazendo a análise do método utilizado, a fim de melhor aproveitá-lo no nosso projeto, objetivando a melhor utilização dele para os fins que pretendemos. Contudo, a impossibilidade de realização de novos testes experimentais, não foi possível reanalisar os dados e compará-los aos métodos analíticos estudados.

#### Referências

- [1] Ewins, D.J. "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, Somerset, 1984, pp. 180
- [2] Petyt, M. "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 1990,
- [3] Bathe, K-J. "Finite Element Procedures", Prentice Hall, New Jersey, 1996, pp. 187
- [4] Alves Filho, A. "Elementos Finitos - A Base da Tecnologia CAE - Análise Dinâmica, Editora Erica, São Paulo, 2005.
- [5] Cortés, F. Elejabarrieta, M.J. "Viscoelastic materials characterisation using the seismic response", Mondragon Unibersitatea, Spain, 2006.
- [6] Barbosa, F.S; Battista, R.C "Modelagem no domínio do tempo e da frequência de estruturas com camadas viscoelásticas amortecedoras" *XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Structural*, Punta Del Este, Uruguay, 2000.
- [7] Backstrom, D.; Nilsson, A.C. "Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters", Tekniska Högskolan, SE-100 44 Stockholm, Sweden, 2006.