



# OTIMIZAÇÃO DE *BOOSTERS* PARA FOGUETES

Roberta de Farias Grigorio

Relatório final de iniciação científica do programa de bolsas de iniciação científica,  
PIBIC, orientado pelo professor Maurício Guimarães da Silva

Instituto de Aeronáutica e Espaço

2018



## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>5</b>
1.1	Objetivos .....	6
<b>2</b>	<b>Materiais e métodos .....</b>	<b>6</b>
2.1	Hipóteses .....	7
2.2	Formulação Matemática.....	7
2.3	Formulação Numérica .....	11
<b>3</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Comentários Finais e Conclusões.....</b>	<b>14</b>



## Lista de figuras

Figura 1 – Resíduo .....	13
Figura 2 – Função de Otimização .....	13
Figura 3 – “Peso Ótimo” da Carga Útil .....	14



## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo determinar a melhor configuração que otimize o peso da carga útil a ser lançada por um veículo que apresenta dois estágios de queima: o *booster* e *sustainer*. O processo de otimização leva em consideração o peso bruto do veículo e da carga útil e tem como base de cálculo a velocidade do veículo ao final da queima de todos os estágios. As equações que modelam o processo de otimização foram resolvidas na plataforma MATLAB™.

## 1 Introdução

De forma geral, o desenvolvimento de veículos aeroespaciais utiliza como referência, configurações geométricas pré-existentes no mercado mundial. Muitas vezes estas configurações não são otimizadas, tendo em vista o grande número de subsistemas que compõe veículos aeroespaciais e a gama de uso destes foguetes. Ou seja, não são desenvolvidos foguetes dedicados para apenas uma missão, o que dificulta sobremaneira o processo de otimização com múltiplos objetivos.

Um exemplo a ser citado é o caso do foguete brasileiro Veículo Lançador de Satélites (VLS), cujo projeto foi, recentemente, descontinuado. Essencialmente, o VLS era composto de 4(quatro) estágios e tinha como objetivo lançar uma carga útil (satélite) de 180 kg, aproximadamente. O primeiro estágio era composto de 4(quatro) *boosters*, iguais em termos de geometria e de propriedades físicas, acoplados ao 2º estágio (central) do veículo. É importante salientar que o VLS não era um veículo otimizado, ou seja, poucos estudos foram realizados com o objetivo de se otimizar, por exemplo, a distribuição de massa ao longo do veículo de forma a se obter melhores parâmetros de desempenho (apogeu, tempo em microgravidade, ... ). De fato, a fase de otimização tem início a partir de configurações de voo que já estão em pleno funcionamento, o que não foi o caso do VLS.

O processo de otimização esbarra em grandes restrições tecnológicas. Estas restrições estão associadas a atual capacidade de fabricação de uma dada empresa e várias limitações de caráter estrutural ou dimensional, entre outros aspectos. Estas limitações não permitem que os resultados do processo de otimização sejam implementados de forma direta.

Dentre as restrições tecnológicas, pode-se citar: (i) Restrições no Motor-Foguete: estão associadas às dimensões máximas que se consegue fabricar o cilindro metálico. No caso do Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial, o diâmetro e comprimento máximos permitidos eram de 1 m e 6 m, respectivamente, na década de 80. (ii) Restrições na Massa de Propelente: trata-se de uma consequência da restrição apresentada em (i). Na década de 80 a maior massa de propelente que era possível ser

fabricada era da ordem de 7.000 kg; (iii) Restrição de Pressão Dinâmica: quanto maior a pressão dinâmica, maior a chance de falha estrutural da ogiva do foguete. No caso do VLS esta ogiva era feita de material composto. Neste contexto, a limitação de pressão dinâmica era bastante restritiva e (iv) Restrição de Aceleração: a aceleração máxima do veículo deve ser dimensionada para que a carga útil (satélite) não se danifique. No caso do VLS, a aceleração máxima permitida era da ordem de  $160 \text{ m/s}^2$ .

Neste contexto, as restrições supramencionadas devem ser levadas em consideração em um processo de otimização. Neste trabalho, o objetivo principal é apresentar uma metodologia que permita otimizar o peso bruto de um veículo, levando em consideração apenas a velocidade do veículo ao final da queima de seus estágios. As principais hipóteses são a ausência de gravidade, ausência de forças aerodinâmicas e velocidade de escape dos gases da tubeira constante durante todo o processo de geração de empuxo. Trata-se de uma metodologia conhecida, contudo pouco aplicada no âmbito da indústria de defesa.

## 1.1 Objetivos

- i. Pesquisa sobre *boosters* de foguetes aeroespaciais;
- ii. Otimização do peso bruto de foguetes com aplicação em Sistemas de Defesa;

## 2 Materiais e métodos

Neste tópico é apresentada a metodologia matemática aplicada no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente são apresentadas as hipóteses do modelo matemático, depois a equação sobre a qual se baseou todo o processo de otimização e, finalmente, é apresentado um exemplo de aplicação.

## 2.1 Hipóteses

- i. O processo de otimização considera apenas a trajetória vertical do foguete;
- ii. Formulação dedicada para foguetes com dois estágios;
- iii. Otimização realizada para a fase de voo sem gravidade e sem atmosfera;
- iv. A velocidade de escape dos gases da tubeira do foguete é considerada constante;
- v. Proporcionalidade entre o peso estrutural, associado a cada estágio, e o peso do propelente;
- vi. Proporcionalidade entre o peso do sistema propulsivo de um estágio e o respectivo peso bruto;

## 2.2 Formulação Matemática

Considere um foguete com dois estágios em uma trajetória vertical. A velocidade do veículo ao final da queima é dada pela equação:

$$v = c_1 \ln \frac{Mg_1}{Mo_1} + c_2 \ln \frac{Mg_2}{Mo_2} \quad (1)$$

Nesta equação  $v$  representa a velocidade do veículo após a queima completa dos propelentes do primeiro e do segundo estágio,  $Mg$  representa o peso bruto do veículo,  $Mo$  o peso do veículo após a queima de todo o propelente e  $c$  a velocidade de exaustão dos gases, considerada constante em toda a formulação matemática. Os subscritos 1 e 2 representam o 1º e 2º estágio do foguete, respectivamente. Salienta-se que no peso bruto do primeiro estágio estão inclusos o peso bruto do segundo estágio e o peso da carga útil.

A principal hipótese deste trabalho é considerar que o peso estrutural associado a cada estágio é proporcional ao peso do respectivo propelente ( $Mp$ ) e o peso do sistema propulsivo é proporcional ao seu respectivo peso bruto ( $Mg$ ). A estimativa destas constantes é fundamentalmente dependente da experiência do grupo desenvolvedor e de

correlações empíricas disponibilizadas na literatura. Estas últimas podem ser utilizadas como referência, por exemplo, para o desenvolvimento de metodologias em otimização

Considere as constantes de proporcionalidade indicadas na Tabela 1. Sabendo-se que o peso bruto de um estágio ( $Mg_i$ ) é igual a soma entre o peso do estágio após a queima ( $Mo_i$ ) e o peso do propelente ( $Mp_i$ ), tem-se:

$$Mg_i = Mo_i + Mp_i \quad (1)$$

De forma geral, o peso do estágio pós queima ( $Mo_i$ ) é o peso da estrutura ( $Me_i$ ) adicionado do peso do sistema propulsivo ( $Msp_i$ : câmara de combustão, tubeira, ...), ou seja:

$$Mo_i = Me_i + Msp_i, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Logo, considerando os outros subsistemas associados a cada estágio, tem-se:

$$Mo_1 = Mg_2 + f_1 Mp_1 + k_1 Mg_1 \quad (3)$$

$$Mo_2 = \bar{M} + f_2 Mp_2 + k_2 Mg_2 \quad (4)$$

Vale ressaltar que o peso do primeiro estágio leva em consideração o peso bruto do segundo estágio e no peso do segundo estágio está incluso o peso da carga útil ( $\bar{M}$ ).

Tabela 1. Constantes de Proporcionalidade

PESO DO SISTEMA	PROPORCIONALIDADE	FORMULAÇÃO
Propulsivo: 1º Estágio	Peso Bruto	$Msp_1 = k_1 Mg_1$
Propulsivo: 2º Estágio	Peso Bruto	$Msp_2 = k_2 Mg_2$
Estrutural: 1º Estágio	Peso de Propelente	$Me_1 = f_1 Mp_1$
Estrutural: 2º Estágio	Peso de Propelente	$Me_2 = f_2 Mp_2$



Isolando-se  $M_{p1}$  e  $M_{p2}$  de ( 1 ) e substituindo-se em ( 3 ) e ( 4 ), tem-se:

$$M_{o1} = \frac{1}{1 + f_1} [M_{g2} + (k_1 + f_1) \times M_{g1}] \quad (5)$$

$$M_{o2} = \frac{1}{1 + f_2} [\bar{M} + (k_2 + f_2) \times M_{g2}] \quad (6)$$

Utilizando as equações ( 5 ) e ( 6 ), pode-se expressar a velocidade final do veículo ao término da queima de acordo com a seguinte expressão:

$$v = c_1 \ln M_{g1} - c_1 \ln \frac{1}{1 + f_1} [M_{g1} + (k_1 + f_1) M_{g1}] + \\ + c_2 \ln \frac{1}{1 + f_2} [\bar{M} + (k_2 + f_2) M_{g2}] \quad (7)$$

A partir dessa equação, pode-se obter a velocidade final do veículo em função das variáveis  $M_{g1}$  e  $M_{g2}$ . Derivando-se a equação acima, em função das variáveis  $M_{g1}$  e  $M_{g2}$ , e igualando-se a zero, tem-se:

$$\left[ \frac{c_1}{M_{g1}} - \frac{c_1(k_1 + f_1)}{M_{g2} + (k_1 + f_1)M_{g1}} \right] dM_{g1} + \\ \left[ \frac{c_2}{M_{g2}} + \frac{c_1}{M_{g2}} - \frac{c_1}{M_{g2} + (k_1 + f_1)} - \frac{c_2(k_2 + f_2)}{\bar{M} + (k_2 + f_2)M_{g2}} \right] dM_{g2} = 0 \quad (8)$$

Logo:

$$\frac{dMg_1}{dMg_2} = - \frac{\left[ \frac{c_2}{Mg_2} - \frac{c_1}{Mg_2 + (k_1 + f_1)} - \frac{c_2(k_2 + f_2)}{\bar{M} + (k_2 + f_2)Mg_2} \right]}{\left[ \frac{c_1}{Mg_1} - \frac{c_1(k_1 + f_1)}{Mg_2 + (k_1 + f_1)Mg_1} \right]} \quad (9)$$

O critério para a otimização do peso bruto é definido a partir da equação diferencial ( 9 ). Desde que o denominador não pode ser igual a zero, obtém-se, igualando-se o numerador a zero, a seguinte expressão:

$$\left[ \frac{c_2}{Mg_2} - \frac{c_1}{Mg_2 + (k_1 + f_1)} - \frac{c_2(k_2 + f_2)}{\bar{M} + (k_2 + f_2)Mg_2} \right] = 0 \quad (10)$$

Manipulando a equação ( 10 ) a fim de obter uma relação para  $\frac{Mg_2}{\bar{M}}$ , tem-se a seguinte equação:

$$\frac{Mg_2}{\bar{M}} = \frac{1}{c_1(k_2 + f_2)} \left[ (c_2 - c_1) + \frac{Mg_1}{Mg_2} c_2(k_1 + f_1) \right] \quad (11)$$

Portanto, a equação ( 7 ) pode ser reescrita com base na equação (11 ), qual seja:

$$v = -c_1 \ln \left\{ \frac{1}{1 + f_1} \left[ \frac{Mg_2}{Mg_1} + (k_1 + f_1) \right] \right\} \quad (1)$$

$$- c_2 \ln \left\{ \frac{1}{1 + f_2} \left[ \frac{c_1(k_2 + f_2)}{(c_2 - c_1) \frac{Mg_1}{Mg_2} c_2(k_1 + f_1)} + (k_2 + f_2) \right] \right\} \quad (2)$$

A equação (12 ) representa a equação de otimalidade, ou seja, a partir desta equação é possível obter a relação ótima entre os pesos brutos (  $\frac{Mg_2}{Mg_1}$  ) para uma dada velocidade final pós queima  $v$ .

## 2.3 Formulação Numérica

O método de Newton Raphson é aplicado com o objetivo de calcular a relação ótima  $\frac{Mg_2}{Mg_1}$ . Com base na equação (12), define-se a função  $F(x)$ , cujas raízes representam a solução ótima do problema, ou seja:

$$F(x) = G\left(x = \frac{Mg_2}{Mg_1}\right) - v \quad (13)$$

Sendo

$$G\left(x = \frac{Mg_2}{Mg_1}\right) = -c_1 \ln\left\{\frac{1}{1+f_1}[x + (k_1 + f_1)]\right\} - c_2 \ln\left\{\frac{1}{1+f_2}\left[\frac{c_1(k_2 + f_2)}{(c_2 - c_1) + \frac{1}{x} c_2 (k_1 + f_1)} + (k_2 + f_2)\right]\right\} \quad (14)$$

De fato, as raízes de  $F(x)$  representam soluções ótimas para a relação  $\frac{Mg_2}{Mg_1}$ . Estas condições de otimização podem ser aplicadas tanto para o *booster* (1º estágio) como também para o *sustainer* (2º estágio). Ressalta-se, porém, que nenhuma das restrições citadas no item 1 deste relatório foram consideradas na presente avaliação.

Na aplicação do Método de Newton Raphson é necessário conhecer a derivada de primeira ordem da função  $F(x)$ . Estas foram obtidas a partir do uso do toolbox *Symbolic* do software MATLAB™, qual seja:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{-c_1}{f_1 + k_1 + x} - \frac{c_1 c_2^2 (f_1 + k_1)(f_2 + k_2)}{H(x)} \quad (15)$$

Sendo

$$H(x) = x^2 \left[ c_2 - c_1 + \frac{c_2(f_1 + k_1)}{x} \right]^2 \left[ f_2 + k_2 + \frac{c_1(f_2 + k_2)}{c_2 - c_1 + \frac{c_2(f_1 + k_1)}{x}} \right] \quad (16)$$

### 3 Resultados

Neste tópico são apresentados alguns dos resultados obtidos nesta pesquisa. A Tabela 2 exibe as condições em que foram realizadas as simulações. O método de Newton Raphson é aplicado para as velocidades de final de queima exibidas nesta Tabela.

Tabela 2. Condições de Simulação

DADOS DE ENTRADA	VALORES	UND
$c_1$	10.000	ft/s
$c_2$	25.000	ft/s
$f_1$	0.0457	m/s
$f_2$	0.0762	m/s
$k_1$	0.0153	m/s
$k_2$	0.0457	m/s
Velocidade no Final de Queima	$[20 - 30] 10^3$	ft/s

A Figura 1 exibe os resíduos obtidos no método NR. A Figura 2 exibe a função de otimização. Para cada velocidade é possível obter a relação ótima  $\frac{M_{g2}}{M_{g1}}$ . Salienta-se que esta curva pode ser ajustada segundo uma função exponencial, tal como ilustra a Figura 2:

$$\frac{Mg_2}{Mg_1} = 18,121 \cdot 0,999^v$$

(17)

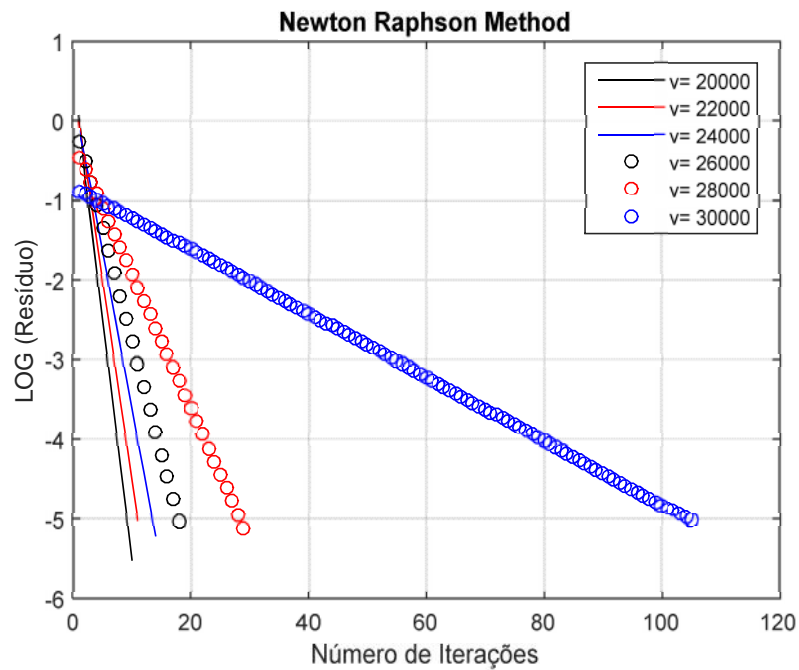


Figura 1 – Resíduo

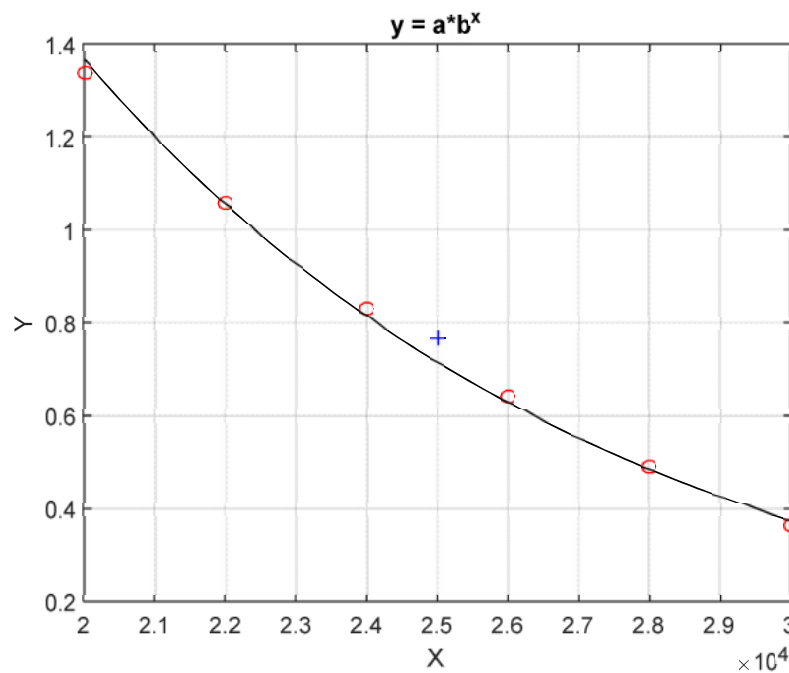


Figura 2 – Função de Otimização

Conhecendo-se a função de otimização e o valor de  $Mg_1$ , pode-se obter uma função que associa a velocidade do veículo ao final da queima e o peso ótimo da carga útil. Com  $Mg_1$ , obtém-se  $Mg_2$  a partir da função de otimização, para uma dada velocidade  $v$ . Com  $Mg_2$ , calcula-se o valor da carga útil a partir da Equação (11) para uma dada velocidade  $v$ . Os resultados deste algoritmo estão ilustrados na Figura 3.

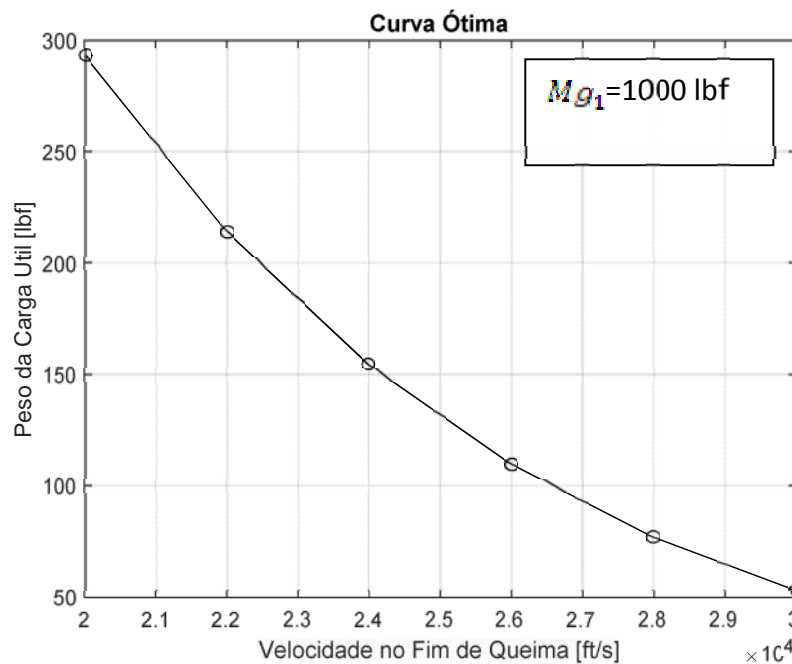


Figura 3 – “Peso Ótimo” da Carga Útil

## 4 Comentários Finais e Conclusões

Este trabalho apresenta uma metodologia de otimização de estágios de veículos aeroespaciais que apresentam 2(dois) estágios. Trata-se de uma metodologia conhecida na literatura, contudo, neste trabalho esta metodologia é implementada na plataforma MATLAB™ e incrementada com a finalidade de se obter uma curva ótima para massa de carga útil, para um dado peso de *booster* conhecido pelo projetista. Todo o processo de dimensionamento foi automatizado.



Os resultados obtidos foram considerados satisfatórios pelo grupo de trabalho tendo em vista a simplicidade da formulação matemática aliada à facilidade de implementação numérica.

As próximas etapas desta pesquisa estão associadas à inclusão desta função nos algoritmos de dinâmica do voo implementados na Divisão de Sistemas de Defesa.