

Relatório Final

Título do projeto de pesquisa: Estudo de cálculo de momentos de inércia, tensores de inércia, ensaios de estimativas de CG e momentos e produtos de inércia.

Bolsista: ESTEVÃO VIDAL SENA

Orientador(a): WANDERLEY PIRES CUNHA

Período a que se refere o relatório: Agosto de 2013 a Janeiro de 2014

Resumo

Através do método do pêndulo de torção invertido^[1] foram feitas 28 medições de momento de inércia de uma superfície aerodinâmica de um veículo espacial, com o objetivo de se demonstrar a utilidade do método para a medição de produto de inércia, para a montagem da **Matriz de Massa de Corpo Rígido**^[3], \mathbf{MM}_{cr} , Eq. (1), composta pelos parâmetros de corpo rígido *massa*, \mathbf{m} , *centro de gravidade*, \mathbf{CG} , e *momentos e produtos de Inércia*, \mathbf{I}_{ij} . Os resultados das medições foram utilizados na Eq.(7), para o cálculo do produto de inércia para cada momento de inércia I_a , a partir de determinado ângulo de montagem, em relação ao sistema de coordenada fixa ao corpo. Com esses resultados, demonstrou-se que apenas três medições são necessárias para a determinação do produto de inércia de um objeto, utilizando-se a Eq.(9). A partir dos dados medidos, foi possível a montagem do *Círculo de Mohr* de propriedades de massa de uma superfície aerodinâmica, de onde se podem obter parâmetros de inércia sem a necessidade de mais medições.

1. Introdução

Os parâmetros de corpo rígido, representados pela \mathbf{MM}_{cr} ^[3]:

$$\mathbf{MM}_{cr} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & m.G_z & -m.G_y \\ 0 & m & 0 & -m.G_z & 0 & m.G_x \\ 0 & 0 & m & m.G_y & -m.G_x & 0 \\ 0 & -m.G_z & m.G_y & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ m.G_z & 0 & -m.G_x & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -m.G_y & m.G_x & 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (1)$$

são determinados por meio de pêndulos^[1,7], porém apenas a matriz diagonal da matriz de inércia tem sido medida por meio desses experimentos, Eq.(2), pois esses elementos não diagonais são geralmente eliminados através de ensaios de balanceamento dinâmico vertical^[1] embora sua determinação seja importante, nos casos em que não seja necessária a sua eliminação, como em satélites não cilíndricos, cuja atitude de vôo não corresponda a rotação em torno de um eixo, porém os procedimentos de controle para posicionamento e manutenção em órbita utiliza como parâmetros todo o tensor de inércia do satélite, assim como a massa e o centro de gravidade, ou seja, a MM_{cr} . Os elementos não diagonais que representam os produtos de inércia são medidos através de métodos indiretos, no domínio do tempo, a partir do método do pêndulo de torção de medição de momento de inércia. Assim sendo, a matriz imediatamente obtida através desse método se expressa como a matriz diagonal:

$$[I_{\setminus}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

2. Material e métodos

Para a aplicação deste método, foram utilizados um dispositivo de fixação, fig.(1), LPM 001-i, sendo $i=1,2,3$, especialmente desenvolvido para permitir a variação angular do corpo de prova, uma superfície aerodinâmica de um veículo espacial, e a máquina de medição de propriedades de massa, de alta precisão de medição de CG e Momentos de Inércia, KSR1320, Space ElectronicsTM. Esse instrumento é equipado com mancais aerostáticos e utiliza o método do pêndulo de torção invertido^[1,7,9]. O método de medição por pêndulo de torção compreende a medição do momento de inércia do corpo de prova, através da eq.(3):

$$I = C(T_t^2 - T_0^2), \quad (3)$$

Onde I é o momento de inércia, C a constante do instrumento de medição e T_t o período de oscilação do pêndulo de torção com o dispositivo de fixação e o objeto e T_0 o

período de oscilação do pêndulo vazio. Para se avaliar o efeito dos erros das medições dos períodos no resultado da medição final^[9,10]:

$$I \cdot |\Delta I| = I \cdot |\Delta I| \quad \Leftrightarrow \quad |\Delta I| = \frac{I |\Delta I|}{I} \quad (4)$$

e sabendo-se que:

$$\Delta I = \left| \frac{2T_t \Delta T_t}{T_t^2 + T_o^2} \right| + \left| \frac{2T_o \Delta T_o}{T_t^2 + T_o^2} \right| \quad (5)$$

consequentemente, tem-se:

$$I = I \pm \Delta I \quad (6)$$

As medições foram feitas em relação ao eixo principal de inércia X, variando-se “C” graus em relação ao eixo X, no sentido horário, tabela I. A partir dessa posição, foram feitas rotações de 10 em 10°, 20 medições, e de 20 em 20°, 8 medições. Utilizando-se a equação (7), calculou-se o produto de inércia I_{xy} , a partir do valor medido do I_a , momento principal de inércia, 0°, I_x , e a 90°, momento principal de inércia I_y .

$$I_{xy} = \left(\frac{I_y \cdot \text{sen}^2 \alpha + I_x \cdot \text{cos}^2 \alpha - I_A}{\text{sen} 2\alpha} \right) \quad (7)$$

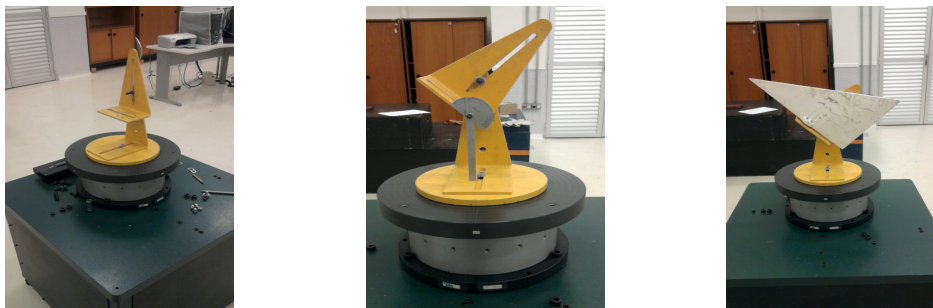


Fig.(1) - Montagem do dispositivo no ângulo de medição e com o corpo de prova.

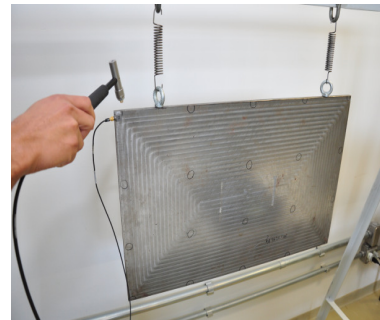
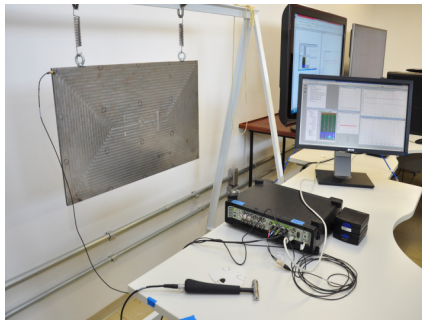


Fig.(2)–Experimento de identificação de modos de corpo rígido através das curvas FRF (Função de Resposta em Freqüência).

Se o eixo longitudinal do veículo é definido como eixo Z, então os produtos de inércia I_{xy} e I_{yz} , são eliminados simultaneamente, no mesmo procedimento de balanceamento dinâmico, não sendo necessário a eliminação do produto de inércia radial, ou seja, I_{xy} , porque um foguete espacial não tem, em condições normais, rotação uniforme em torno dos eixos X e Y, plano radial. Assim sendo, o tensor de inércia do último estágio de um lançador de satélites é definido como:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (8)$$

3.Resultados

Pôde-se demonstrar assim que para a medição do produto de inércia de um objeto, utilizando-se o método de medição de momento de inércia, bastam três medições, a 0° , I_x , a 90° , I_y e a 45° , I_a , através da equação (9):

$$I = \frac{I_y}{2} + \frac{I_x}{2} - I_a \quad (9)$$

O momento de inércia em relação ao eixo Z, momento polar de inércia, é a soma de I_x com I_y :

$$I_z = I_x + I_y \quad (10)$$

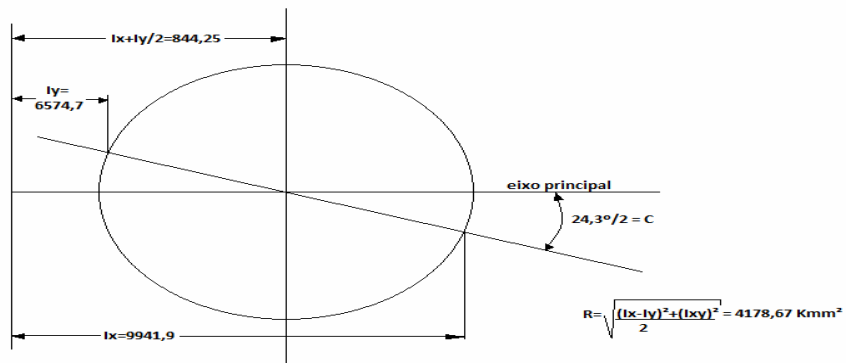


Fig (3): Circulo de Mohr montado à partir das medições feita no corpo de prova

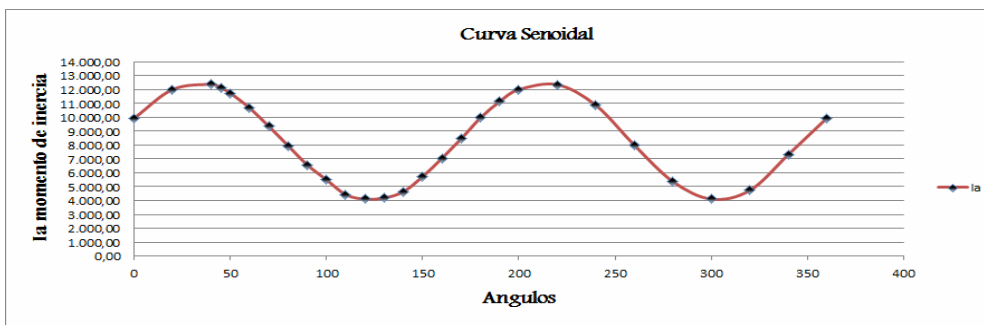


Fig (4): Curva Senoidal para a identificação do Ia máximo e mínimo.

TABELA 1 – Medições de Momento de Inércia I_a e Produto de Inércia I_{xy}

Nº	Ângulo "C"	I_a (kg.mm ²)	I_{xy} (kg.mm ²)
(1)	0°	9.941,9±29,8	-----
(2)	20°	12.016,8±36,1	-3.840,7 ±11,5
(3)	40°	12.377,6±37,1	-3.886,0±11,7
(4)	45°	12.129,5±36,4	-3.871,1±11,6
(5)	50°	11.744,5±35,2	-3.836,8±11,5
(6)	60°	10.677,6±32,0	-3.765,5±11,3
(7)	70°	9.352,9±28,1	-3.709,4±11,1
(8)	80°	7.957,7±23,9	-3.746,8±11,2
(9)	90°	6.574,7±19,7	-----
(10)	100°	5.495,6±16,5	-3.452,1±10,4
(11)	110°	4.430,0±13,3	-3.949,4±11,8
(12)	120°	4.110,9±12,3	-3.817,1±11,5
(13)	130°	4.190,4±12,6	-3.833,9±11,5
(14)	140°	4.649,0±13,9	-3.961,9±11,9
(15)	150°	5.736,8±17,2	-3.883,6±11,7

(16)	160°	7.056,2±21,2	-3.876,7±11,6
(17)	170°	8.468,3±25,4	-4.011,8±12,0
(18)	180°	9.969,6±29,9	-----
(19)	190°	11.148,3±33,4	-3.824,1±11,5
(20)	200°	12.009,3±36,0	-3.829,0±11,5
(21)	220°	12.359,1±37,1	-3.867,1±11,6
(22)	240°	10.871,4±32,6	-3.989,3±12,0
(23)	260°	7.998,7±24,0	-3.866,6±11,6
(24)	280°	5.372,4±16,1	-3.812,1±11,4
(25)	300°	4.112,6±12,3	-3.815,1±11,4
(26)	320°	4.736,6±14,2	-3.872,9±11,6
(27)	340°	7.318,9±21,9	-3.468,0±10,4
(28)	360°	9.941,9±29,8	-----

Sendo o valor médio dos resultados dessas medições:

$$I_{xy} = -3.824,5 \pm 13,6 \text{ kg.m}^2$$

O erro do procedimento é, portanto 3,5 %, isso porque se utiliza um método indireto, ou seja, medições para se determinar o momento de inércia, através do método do pêndulo de torção invertido, aplicando-se em seguida esses valores medidos na eq.(7), sendo que esse processo contribui para a acumulação de erros^[7,10]. O instrumento de medição KSR1320 permite medições com precisão de 0,3%, comprovado por meio de calibrações periódicas. O acúmulo de erros se deve à soma de efeitos ambientais, como deslocamento de ar e variação da temperatura ambiente para além da faixa de $\pm 3^\circ \text{ C}^{[11]}$, imprecisão de posicionamento do objeto em teste sobre o instrumento e erro humano^[10]. O tensor de inércia da superfície aerodinâmica pode então ser definido como:

$$[I] = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,38 & 0 \\ 0,38 & 0,66 & 0 \\ 0 & 0 & 1,65 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \quad (11)$$

4. Conclusões

Demonstrou-se neste trabalho que o método estudado pode ser utilizado desde que se disponha de um dispositivo de fixação que permita afixação do objeto em teste a 45° de

um sistema de coordenadas de referência, baricêntrico, paralelo ao eixo de medição da máquina. Foram estudados métodos no domínio da frequência, utilizando-se uma placa metálica como corpo de prova, suspensa sobre duas molas, fig.(2), de forma a simular condições de contorno livre-livre. Os métodos que utilizam o domínio da frequência não exigem uma infra-estrutura de ensaios de grandes estruturas, porém se limitam a corpos de prova leves, devido ao requisito de montagem sob suspensões que permitam reproduzir o mais próximo possível condições de contorno livre-livre. Ainda como desvantagem de ensaios no domínio da frequência é a eliminação de ruídos na faixa de baixa frequência, e a acumulação de modos de corpo rígido em torno de uma pequena faixa de frequência, dificultando o processo de identificação, exigindo assim o emprego de filtros numéricos, sem falar dos problemas resultantes da necessidade de utilização de algoritmos de recursão, como são métodos numéricos aplicados a sistemas não-lineares, que com muitas restrições, simulam-se como lineares. Como alternativa, há a possibilidade de estudo e aplicação de métodos no domínio da frequência, porém que utilizam simuladores espaciais^[12,13], equipamentos equipados com mancais aerostáticos similares aos instrumentos de medição que utilizam o método de torção invertido, estudados neste trabalho. Estes assim, possibilitam o trabalho com objetos de grandes dimensões. A partir dessas considerações, é importante o aprofundamento dos estudos de métodos no domínio da frequência, em simuladores, como opções de ensaios, e serão o escopo de pesquisa futura no LPM.

5. Bibliografia

- [1] WIENER, K., BOYNTON, R. Using the "Moment of Inertia Method" to Determine Product of Inertia, 51st Annual Conference of the Society of Allied Weight Engineers, at Hartford, Connecticut May 18-20, 1992.
- [2] EWINS, D., J., Modal Testing: Theory and Practice, 1986.
- [3] NAPOLITANO, K., SCHLOSSER, M. Calculation of Rigid Body Mass Properties of Flexible Structures, Proceedings of the 29th IMAC, A Conference on Structural Dynamics, pp 73-94, 2011.
- [4] ALMEIDA, R. A. S. B., Determinação de características dinâmicas de corpos rígidos com base em resultados experimentais, tese de doutorado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2005.
- [7] CUNHA, W. P., NISHIMOTO, N., CONSIGLIERE, C., Medição de Momento de Inércia através de Pêndulo de Torção Invertido, RT 001 ETE/84, Relatório Técnico, CTA/IAE, Divisão de Ensaios, 1984.
- [8] TOIVOLA, J., NUUTILA, O. Comparison of three methods for determining rigid body inertia properties from frequency response functions, Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, FL, 1997, pp. 1126-1132.
- [9] CUNHA, W. P., Sistema para Medição de Propriedades de Massa, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, 1993.
- [10] DOEBELIN, E. O., Measurement Systems, Application and Design, MacGraw Hill, 1990.
- [11] FIELDS, K., Mass Property Measurements of The Mars Science Laboratory Rover, jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 27th Space Simulation Conference, November, 2012.
- [12] CASTRO, C. J., Simulação e Validação de Sistema de Controle de Atitude e Velocidade de Veículos Espaciais, V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM, Salvador, Bahia, 2008.
- [13] PECK, M. A., Mass-Properties Estimation for spacecraft with Powerfull Damping, AAS/AIAA Astrodynamics specialist Conference, Girdwood, Alaska, 16-19 August 1999.