



Relatório Final

Título do projeto de pesquisa: Análise Aeroelástica de Asas Alongadas Utilizando CFD
Bolsista: João Marcos Druzian Filho
Orientador(a): João Luiz Filgueiras de Azevedo
Período a que se refere o relatório: Agosto de 2013 a Julho de 2014

Resumo

Funções de base radial (do inglês *Radial Basis Function*, ou RBF) são implementadas para fornecer uma solução para o movimento de malha em um problema de aeroelasticidade computacional. Durante uma simulação aeroelástica normalmente é necessário atualizar uma malha computacional com base na deformação de uma ou mais superfícies. Do mesmo modo, também pode ser conveniente deformar uma malha para acomodar uma modificação de projeto ao invés de gerar novamente uma malha inteira de acordo com numa nova superfície. Isto ajudaria a reduzir custos e tempo do projeto.

O presente projeto de pesquisa tem o objetivo de implementar o método de RBF's para o movimento de malhas tridimensionais, sobre as mais diversas configurações, para uso em programas de CFD para análise aeroelástica de asas alongadas, bem como para integração com programas de otimização de estruturas aeronáuticas. Neste relatório serão apresentados um resumo da teoria de RBF e um exemplo de uma aplicação da técnica em duas dimensões para acomodar o movimento dos pontos interiores de uma malha, a qual teve um de seus nós deslocado da posição original. O relatório apresenta ainda um resumo do estado de desenvolvimento/implementação da metodologia para o objetivo maior do projeto que é estudar o comportamento aeroelástico de asas alongadas utilizando técnicas de CFD para compor o operador aerodinâmico.

1. Introdução

O avanço por parte da indústria de microeletrônica no desenvolvimento de processadores tem possibilitado um progresso em engenharia de *software* para análise de CFD. Com isso, torna-se cada vez mais comum o uso em conjunto de programas de análise dinâmico-estrutural com programas de CFD para solução de problemas em aeroelasticidade computacional. Ao considerar um problema de aeroelasticidade, normalmente é necessário atualizar uma malha computacional com base na deformação de uma ou mais superfícies. Esta atualização pode ser feita através do reposicionamento de pontos, ou pode ser executado um novo processo de geração de malha. Normalmente, o processo de reposicionamento de pontos oferece uma vantagem muito grande, em termos do tempo de processamento, em relação ao processo de geração de uma malha nova. Do mesmo modo, também pode ser conveniente deformar uma malha para acomodar uma modificação de projeto, por exemplo, durante um exercício de otimização multidisciplinar, em vez de gerar novamente uma malha inteira de acordo com numa nova superfície.

A aplicação da teoria de RBF pode ser tanto para malhas estruturadas como para malhas não estruturadas. Também foi desenvolvido por Rendall e Allen^{1,2} uma abordagem *meshless* para a aplicação das RBF's. Neste método não existe uma conectividade e todas as operações são realizadas em nuvens de pontos com posições totalmente arbitrárias. Isto demonstra uma grande flexibilidade no uso de RBF's. Outro ponto favorável da RBF é que a perturbação, quando gerada em um ponto específico da malha é propagada para todos os outros pontos, de forma a acomodar essa distorção suavemente por toda a malha.

Os objetivos deste trabalho são apresentar uma breve introdução à formulação matemática da técnica de RBF, suas vantagens tanto em termos de desempenho computacional quanto da qualidade dos resultados, e um exemplo da aplicação desta técnica no cálculo da deformação de uma malha sobre um perfil aerodinâmico, em um contexto de malhas estruturadas.

2. Materiais e Métodos

Sabe-se que existem vários métodos e modos de implementação das RBF's, conforme apresentado nas Refs. 1, 2, 3, 4 e 5. Porém, para o presente trabalho, levando-se em consideração o uso de malhas estruturadas, o desenvolvimento foi apoiado, principalmente, nas Refs. 1 e 3.

2.1 Formulação

A teoria geral das RBF's é apresentada por Buhmann⁶ e Wendland⁷. Exemplos de aplicações das RBF's para interpolação fluido-estrutura são apresentados por Wendland^{4,8}. Nestes exemplos, o método é aplicado para o estudo de deflexões estáticas de uma aeronave em um escoamento transônico, ou seja, nos estudos desta natureza é preciso realizar uma interpolação entre as informações da malha de fluido e da estrutural. Outra aplicação, a qual é razão deste esforço, é o uso desta técnica para movimentação e deformação de malhas para análises aeroelásticas, a qual pode ser vista com detalhes nos trabalhos apresentados por Rendall e Allen^{1,2,5}, e de Boer *et al*^{9,10}.

A solução de um problema de interpolação usando RBF inicia-se com a forma da interpolação^{1,2,3}

$$s(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (1)$$

Assim, $s(x)$ é a função a ser avaliada na posição x , ϕ é a forma da função de base radial adotada, com exemplos mostrados na Tab. 1, o índice i identifica os centros para as RBF's, enquanto que x_i é o local do centro, e os coeficientes α_i são encontrados exigindo a recuperação exata da função original nos pontos de controle.

Para facilitar o tratamento computacional, que maximiza a utilização de multiplicação de matrizes, o problema é escrito da seguinte forma: usando s para denotar um ponto de malha de superfície, o sistema se dá como

$$X_s = M \cdot a_x, \quad (2)$$

$$Y_s = M \cdot a_y, \quad (3)$$

$$Z_s = M \cdot a_z, \quad (4)$$

Tabela 1. Funções de base

Nome	Definição
Gaussian (G)	$\phi(\ x\) = e^{-\alpha\ x\ ^2}$
Thin plate spline (TPS)	$\phi(\ x\) = \ x\ ^2 \ln\ x\ $
Hardy's multiquadric (HMQ)	$\phi(\ x\) = (c^2 + \ x\ ^2)^{1/2}$
Hardy's inverse multiquadric (HIMQ)	$\phi(\ x\) = 1/(c^2 + \ x\ ^2)^{1/2}$
Wendland's C0 (C0)	$\phi(\ x\) = (1 - \ x\)^2$
Wendland's C2 (C2)	$\phi(\ x\) = (1 - \ x\)^4(4\ x\ + 1)$
Wendland's C4 (C4)	$\phi(\ x\) = (1 - \ x\)^6(35\ x\ ^2 + 18\ x\ + 3)$
Wendland's C6 (C6)	$\phi(\ x\) = (1 - \ x\)^8(32\ x\ ^3 + 25\ x\ ^2 + 8\ x\ + 1)$
Euclid's Hat (EH)	$\phi(\ x\) = \pi \left(\left(\frac{1}{12} \ x\ ^3 \right) - r^2 \ x\ + \left(\frac{4}{3} r^3 \right) \right)$

onde

$$X_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_s \end{bmatrix}, \quad x_s = \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_N} \end{bmatrix}, \quad a_x = \begin{Bmatrix} \gamma_0^x \\ \gamma_x^x \\ \gamma_y^x \\ \gamma_z^x \\ \alpha_{s_1}^x \\ \vdots \\ \alpha_{s_N}^x \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

A mesma analogia é mantida para Y_s , Z_s e seus vetores a . Nas Eqs. 2, 3 e 4, a matriz M é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{s_1} & x_{s_2} & \cdots & x_{s_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_{s_1} & y_{s_2} & \cdots & y_{s_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_{s_1} & z_{s_2} & \cdots & z_{s_N} \\ 1 & x_{s_1} & y_{s_1} & z_{s_1} & \phi_{s_1 s_1} & \phi_{s_1 s_2} & \cdots & \phi_{s_1 s_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{s_N} & y_{s_N} & z_{s_N} & \phi_{s_N s_1} & \phi_{s_N s_2} & \cdots & \phi_{s_N s_N} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

com

$$\phi_{s_1 s_2} = \phi(\|x_{s_1} - x_{s_2}\|) \quad (7)$$

indicando a função de base avaliada para o valor da distância entre os pontos s_1 e s_2 .

Para o presente estudo, foi utilizada, primeiramente, a função de base C2 de Wendland, pois esta seria a opção mais apropriada para problemas 2-D e 3-D. Todas as equações são possíveis de serem interpoladas. Porém, após a realização de testes utilizando planilhas desenvolvidas sobre o software Excel, foi adotada a equação Hardy's Multiquadric (HMQ) por se destacar e apresentar uma maior suavização das superfícies. Para a função distância foi adotada a norma euclidiana, cuja definição é apresentada pela Eq. 8 a seguir:

$$\|x - x_i\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}. \quad (8)$$

Logo, a matriz M é construída utilizando-se as informações das coordenadas dos nós de malha na superfície, e os valores das funções de base radial devidamente escolhidas, $\phi_{s_N s_N}$, calculados com base nas diferenças entre dois pontos (por exemplo, no caso da função de base $\phi_{s_3 s_4}$, os pontos utilizados são s_3 e s_4).

Para localizar os pontos do interior da malha, a seguinte matriz A deve ser formada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{v_1} & y_{v_1} & z_{v_1} & \phi_{v_1 s_1} & \phi_{v_1 s_2} & \cdots & \phi_{v_1 s_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{v_N} & y_{v_N} & z_{v_N} & \phi_{v_N s_1} & \phi_{v_N s_2} & \cdots & \phi_{v_N s_N} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

sendo que o subscrito v denota os índices dos pontos do interior da malha. Então as posições dos pontos interiores são dadas pelos vetores x_v , y_v e z_v , conforme as equações abaixo:

$$x_v = A \cdot a_x = A \cdot M^{-1} \cdot X_s = H \cdot X_s, \quad (10)$$

$$y_v = A \cdot a_y = A \cdot M^{-1} \cdot Y_s = H \cdot Y_s, \quad (11)$$

$$z_v = A \cdot a_z = A \cdot M^{-1} \cdot Z_s = H \cdot Z_s, \quad (12)$$

ou, de forma mais concisa,

$$\begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Uma vez que as funções terão um valor de zero longe dos seus centros, as novas posições dos pontos interiores da malha serão calculadas a partir dos valores iniciais (x_v), acrescidos dos valores de deslocamentos (dx_v), os quais são calculados multiplicando-se os valores dos pontos de superfície (dx_s) pelo valor de H ,

$$dx_v = H \cdot dx_s. \quad (14)$$

Assim, essas mudanças podem ser encontradas a partir de

$$\Delta X_v = H \cdot \Delta X_s. \quad (15)$$

3. Resultados

Para um primeiro teste, uma malha estruturada simples (idealizada) foi criada. A partir desta malha inicial, foram aplicados deslocamentos em diversos pontos e, a partir dessa deformação, o reposicionamento dos demais pontos da malha foi obtido através da aplicação das RBF's, como discutido nos próximos parágrafos.

Conforme mostrado a seguir, na Fig. 1, a malha foi construída de acordo com os pontos apresentados na Tab. 2, sendo que os campos em vermelho denotam a “fronteira distante”, ou seja, o *farfield* comumente encontrado em aplicações de CFD. Esta fronteira distante entrará como uma superfície especificada, pois deste modo será possível congelá-la.

Tabela 2: Coordenadas iniciais dos pontos da malha.

Ponto	X	Y
(1,1)	2,00	3,00
(2,1)	4,00	3,13
(3,1)	6,00	3,25
(4,1)	8,00	3,35
(5,1)	10,00	3,40
(6,1)	12,00	3,37
(7,1)	14,00	3,31
(8,1)	16,00	3,25
(9,1)	18,00	3,10
(10,1)	20,00	3,00
(1,2)	2,00	5,00
(2,2)	4,00	5,00
(3,2)	6,00	5,00
(4,2)	8,00	5,00
(5,2)	10,00	5,00
(6,2)	12,00	5,00
(7,2)	14,00	5,00
(8,2)	16,00	5,00
(9,2)	18,00	5,00
(10,2)	20,00	5,00
(1,3)	2,00	7,00
(2,3)	4,00	7,00
(3,3)	6,00	7,00
(4,3)	8,00	7,00
(5,3)	10,00	7,00
(6,3)	12,00	7,00
(7,3)	14,00	7,00
(8,3)	16,00	7,00
(9,3)	18,00	7,00
(10,3)	20,00	7,00
(1,4)	2,00	9,00
(2,4)	4,00	9,00
(3,4)	6,00	9,00
(4,4)	8,00	9,00
(5,4)	10,00	9,00
(6,4)	12,00	9,00
(7,4)	14,00	9,00
(8,4)	16,00	9,00
(9,4)	18,00	9,00
(10,4)	20,00	9,00

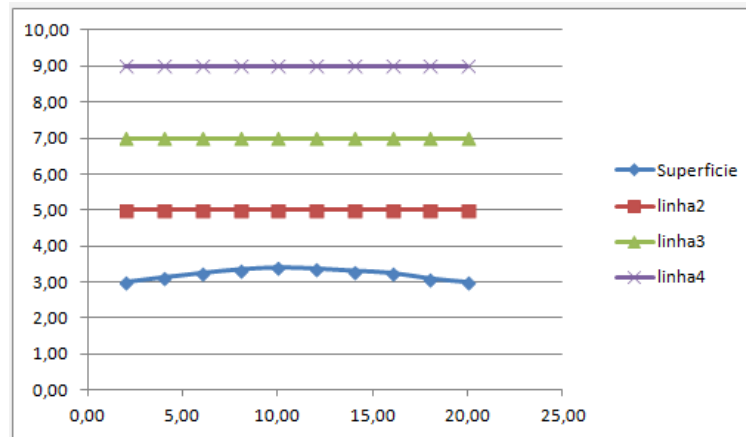


Figura 1: Malha idealizada (original).

Após a obtenção da malha inicial, de acordo com a Eq. 5, foram encontradas as matrizes X_s , x_s , Y_s , y_s , ou seja, os pontos de superfície e *farfield*, e os vetores a_x e a_y , conforme a Tab. 3.

Tabela 3: Conjunto de matrizes colunas e vetores da malha de superfície.

X_s	x_s	a_x	Y_s	y_s	a_y
0,00	2	7,99361E-14	0,00	3,00	1,68754E-14
0,00	4	1	0,00	3,13	-2,05391E-15
0,00	6	-4,77396E-15	0,00	3,25	1
2,00	8	5,88418E-15	3,00	3,35	2,96985E-15
4,00	10	-1,05471E-15	3,13	3,40	-9,33281E-16
6,00	12	1,55431E-15	3,25	3,37	1,06165E-15
8,00	14	-8,89566E-15	3,35	3,31	-2,97679E-15
10,00	16	1,97758E-14	3,40	3,25	6,25194E-15
12,00	18	-4,77396E-15	3,37	3,10	-1,38778E-15
14,00	20	-9,07607E-15	3,31	3,00	-2,09555E-15
16,00	2,00	8,38218E-15	3,25	5,00	2,02616E-15
18,00	20,00	-9,21485E-15	3,10	5,00	-2,33147E-15
20,00	2,00	8,65974E-15	3,00	7,00	2,47025E-15
2,00	20,00	-2,21871E-15	5,00	7,00	-2,82673E-15
20,00	2,00	-2,58127E-15	5,00	9,00	-8,04912E-16
2,00	4,00	1,52656E-15	7,00	9,00	9,22873E-16
20,00	6,00	-3,55271E-15	7,00	9,00	4,44089E-16
2,00	8,00	3,63598E-15	9,00	9,00	7,35523E-16
4,00	10,00	-2,13718E-15	9,00	9,00	9,4369E-16
6,00	12,00	-2,1233E-15	9,00	9,00	-2,45637E-15
8,00	14,00	2,20657E-15	9,00	9,00	1,11716E-15
10,00	16,00	-5,63438E-15	9,00	9,00	-3,26128E-15
12,00	18,00	4,46865E-15	9,00	9,00	2,3731E-15
14,00	20,00	-1,52656E-15	9,00	9,00	-5,82867E-16
16,00		1,16573E-15	9,00		5,68989E-16
18,00		-1,77636E-15	9,00		-4,44089E-16
20,00		-3,55271E-15	9,00		-8,88178E-16

A Fig. 2 mostra a matriz M , de acordo com a Eq. 6, na qual foi utilizada a função de base radial *Hardy's multiquadric* (HMQ) e, para a constante c , constante responsável pela suavidade da deformação, adotou-se arbitrariamente o valor $c = 0,1$. Como neste trabalho foi

De acordo com a Eq. 10, tem-se que H é igual a $A \cdot M^{-1}$. Logo, para se encontrar os novos deltas, ou seja, os X_{v_new} e Y_{v_new} apresentados na Tab. 4 abaixo, é preciso multiplicar a matriz H pela variação ou oscilação desejada. No caso, é preciso multiplicar pelo DX ou o DY , não se esquecendo de que os campos em vermelhos representam o *farfield*, cuja movimentação não é desejada.

Tabela 4: Variação das coordenadas de pontos.

X_s	DX	Y_s	DY	X_{v_new}	Y_{v_new}
0,00	0	0,00	0	0	0,338486
0,00	0	0,00	0	0	0,124817
0,00	0	0,00	0	0	0,001395
2,00	0	3,00	0	0	-0,008902
4,00	0	3,13	1	0	-0,007384
6,00	0	3,25	0	0	-0,005573
8,00	0	3,35	0	0	-0,004647
10,00	0	3,40	0	0	-0,004015
12,00	0	3,37	0	0	0,092756
14,00	0	3,31	0	0	0,064986
16,00	0	3,25	0	0	0,013248
18,00	0	3,10	0	0	-0,002429
20,00	0	3,00	0	0	-0,00352
2,00	0	5,00	0	0	-0,002437
20,00	0	5,00	0	0	-0,001718
2,00	0	7,00	0	0	-0,001201
20,00	0	7,00	0		
2,00	0	9,00	0		
4,00	0	9,00	0		
6,00	0	9,00	0		
8,00	0	9,00	0		
10,00	0	9,00	0		
12,00	0	9,00	0		
14,00	0	9,00	0		
16,00	0	9,00	0		
18,00	0	9,00	0		
20,00	0	9,00	0		

Posteriormente à Eq. 15 é necessário acrescentar a variação encontrada, X_{v_new} e Y_{v_new} , às antigas posições dos pontos, conforme mostrado na Tab. 5 a seguir.

Tabela 5: Malha original e nova malha.

MALHA ORIGINAL			MALHA MODIFICADA		
Pontos	X	Y	Pontos	X'	Y'
(1,1)	2,00	3,00	(1,1)	2,00	3,00
(2,1)	4,00	3,13	(2,1)	4,00	5,13
(3,1)	6,00	3,25	(3,1)	6,00	3,25
(4,1)	8,00	3,35	(4,1)	8,00	3,35
(5,1)	10,00	3,40	(5,1)	10,00	3,40
(6,1)	12,00	3,37	(6,1)	12,00	3,37
(7,1)	14,00	3,31	(7,1)	14,00	3,31
(8,1)	16,00	3,25	(8,1)	16,00	3,25
(9,1)	18,00	3,10	(9,1)	18,00	3,10
(10,1)	20,00	3,00	(10,1)	20,00	3,00
(1,2)	2,00	5,00	(1,2)	2,00	5,00
(2,2)	4,00	5,00	(2,2)	4,00	5,68
(3,2)	6,00	5,00	(3,2)	6,00	5,25
(4,2)	8,00	5,00	(4,2)	8,00	5,00
(5,2)	10,00	5,00	(5,2)	10,00	4,98
(6,2)	12,00	5,00	(6,2)	12,00	4,99
(7,2)	14,00	5,00	(7,2)	14,00	4,99
(8,2)	16,00	5,00	(8,2)	16,00	4,99
(9,2)	18,00	5,00	(9,2)	18,00	4,99
(10,2)	20,00	5,00	(10,2)	20,00	5,00
(1,3)	2,00	7,00	(1,3)	2,00	7,00
(2,3)	4,00	7,00	(2,3)	4,00	7,19
(3,3)	6,00	7,00	(3,3)	6,00	7,13
(4,3)	8,00	7,00	(4,3)	8,00	7,03
(5,3)	10,00	7,00	(5,3)	10,00	7,00
(6,3)	12,00	7,00	(6,3)	12,00	6,99
(7,3)	14,00	7,00	(7,3)	14,00	7,00
(8,3)	16,00	7,00	(8,3)	16,00	7,00
(9,3)	18,00	7,00	(9,3)	18,00	7,00
(10,3)	20,00	7,00	(10,3)	20,00	7,00
(1,4)	2,00	9,00	(1,4)	2,00	9,00
(2,4)	4,00	9,00	(2,4)	4,00	9,00
(3,4)	6,00	9,00	(3,4)	6,00	9,00
(4,4)	8,00	9,00	(4,4)	8,00	9,00
(5,4)	10,00	9,00	(5,4)	10,00	9,00
(6,4)	12,00	9,00	(6,4)	12,00	9,00
(7,4)	14,00	9,00	(7,4)	14,00	9,00
(8,4)	16,00	9,00	(8,4)	16,00	9,00
(9,4)	18,00	9,00	(9,4)	18,00	9,00
(10,4)	20,00	9,00	(10,4)	20,00	9,00

Por fim, têm-se os deslocamentos de todos os pontos da malha, como é apresentado na Fig. 6. Por meio da análise desta figura, é possível notar que, a partir de uma deformação na superfície inferior, as linhas internas da malha se acomodam a esta perturbação. No caso deste exemplo, o ponto localizado na ordenada 3,13, sobre a linha 1, azul, é deslocado para cima. Como se pode ver, as linhas internas da malha, ou seja, as linhas 2, 3 e 4 se acomodam a esta perturbação, sendo que, à medida que se afastam do ponto específico da deformação, o deslocamento dos pontos vai sendo suavizado automaticamente, até se atingir o *farfield* que não é afetado pela deformação.

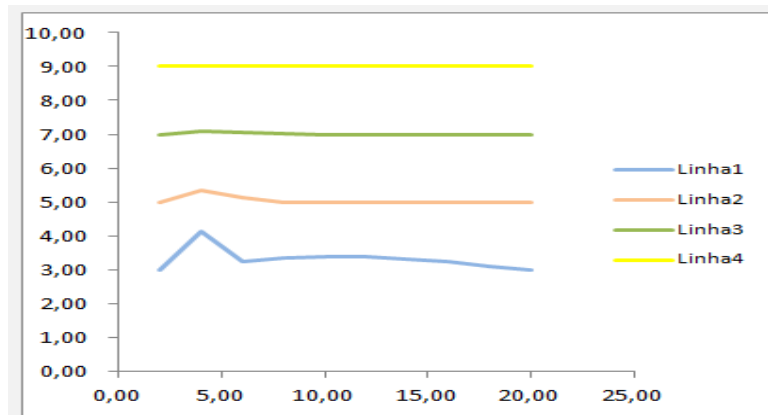


Figura 6: Nova malha (deformada).

4. Conclusão

Neste relatório foi mostrada uma breve introdução à teoria de RBF, com base em uma revisão bibliográfica. Também foram mostrados os resultados para uma aplicação no movimento dos pontos de uma malha de teste. Primeiramente foi realizado um teste usando a função de base C2 de Wendland, conforme sugerido por Allen¹. Porém, na realização de diversos testes, verificou-se que a equação Hardy's Multiquadric, HMQ, apresenta melhores resultados. Em outras palavras, observou-se que, a partir de uma deformação da superfície inferior, a deformação da malha se acomodava melhor com a utilização desta última função, suavizando-se até o *farfield*. Assim, com este teste, ficou claro que há duas fases a serem realizadas para a movimentação da malha. Primeiramente vem o “*solver*”, fase na qual é calculado o valor de M^{-1} , ou resolvendo-se $a_{x/y/z}$. Em segundo lugar vem o processo de “*update*”, que é equivalente tanto à multiplicação de $a_{x/y/z}$ pela matriz A , ou através de H . Contudo, a técnica de movimentação de malha via RBF se mostrou bastante eficaz, conforme apontado pela literatura.

É importante destacar que todo o desenvolvimento reportado aqui foi realizado sobre o software Excel, como uma prova de conceito de que as metodologias a serem empregadas seriam efetivamente capazes de resolver os problemas de interesse. No momento de redação do presente relatório, encontra-se em andamento a implementação destas técnicas em uma linguagem de programação formal, bem como a execução de um caso teste em três dimensões. Posteriormente a isso, vai-se construir uma interface entre o programa que

implementa as RBF's e os códigos de CFD disponíveis na ALA, de forma a efetivamente ter ferramentas para análise aeroelástica de asas alongadas.

Referências

[1] T.C.S. Rendall and C.B. Allen. Fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. In press, DOI 10.1002/nme.2219.

[2] C.B. Allen and T.C.S. Rendall. A unified approach to CFD-CSD interpolation and mesh motion using radial basis functions. AIAA Paper No. 2007-3804, *Proceedings of the 25th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Miami, FL, 2007.

[3] T.C.S. Rendall and C.B. Allen. Parallel efficient mesh using Radial Basis Functions with application to multi-bladed rotors. AIAA Paper No. 2008-6724, *Proceedings of the 26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.

[4] A. Beckert and H. Wendland. Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, 5:125-134, May-June 2001.

[5] T.C.S. Rendall and C.B. Allen. Efficient mesh using radial basis functions with data reduction algorithms. AIAA Paper No. 2008-0305, *Proceedings of the 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, 2008.

[6] M. Buhmann. *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press, 1st edition, Cambridge, 2005.

[7] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 1st edition, Cambridge, 2005.

[8] R. Ahrem, A. Beckert, and H. Wendland. A meshless spatial coupling scheme for large-scal fluid-structure interaction problems. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 12:121-136, 2006.

[9] A. de Boer, M.S. dan der Shoot, and H. Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers and Structures*, 85:784-795, 2007.

[10] A.H. van Zuijlen, A. de Boer, and H. Bijl. Higher order time integration through smooth mesh deformation for 3D fluid-structure interaction simulations. *Journal of Computational Physics*, 224:414-430, 2007.