

## Relatório Final

Título do projeto de pesquisa:	Estudo de cálculo de momentos de inércia, tensores de inércia, ensaios de estimativas de CG e momentos e produtos de inércia.
Bolsista:	FELIPE JOSÉ PEREIRA DO AMARAL
Orientador (a):	WANDERLEY PIRES CUNHA
Período a que se refere o relatório:	Agosto de 2015 a Agosto de 2016

### Resumo

No presente trabalho é apresentada a conclusão do experimento de identificação da matriz de inércia e do centro de gravidade de uma maquete espacial simulada, instalada em uma placa esférica, sob um mancal a ar, correspondendo a um simulador espacial para a aplicação em simulações de manobras de engenhos espaciais. O experimento consiste na utilização do método dos mínimos quadrados para a identificação dos parâmetros de propriedades de massa, através da aplicação de torques por meio das três rodas de reação, instaladas transversais aos eixos da maquete. No relatório anterior foram descritas as manobras de rotação aplicadas ao dispositivo, quando não se obteve a identificação dos parâmetros, devido à singularidade da matriz das acelerações angulares. Para superar esse problema, foram instaladas rotinas de filtragem no programa **Matlab** utilizado no procedimento. Foram feitas novas manobras para a identificação de todos os parâmetros, porém só foi possível a identificação da matriz com todos os dados após manobras longas, sendo que os dados resultantes não convergiam com os do projeto **CAD/SolidWorks** quando se alterava o valor do torque aplicado sobre as rodas. Foram feitas manobras de rotação pura, com aplicação de torque por eixo, ou seja, aplicando-se torque em apenas uma roda de reação de cada vez, obtendo-se assim um parâmetro por manobra, que convergiu com os do projeto **CAD**. Entretanto, no presente trabalho, foi possível obter os resultados com a aplicação de torque nas três rodas de reação. Os procedimentos adotados são discutidos a seguir.

## 1. Introdução

Um objeto em órbita em torno da terra, ou em missões de longas distâncias no espaço, frequentemente sofre perturbações, que provocam variações nas suas propriedades de massa. Essas variações podem ser devido a consumo de combustível, choque de corpos espaciais e perturbações diversas. Devido a esses fatores, durante a missão, o controle do veículo, em terra, precisa corrigir sua rota desviada e para isso conhecer com precisão os dados modificados em vôo, o tensor de inércia, a massa e o CG, através de métodos de identificação<sup>[3], [4], [5]</sup>.

O simulador espacial apresentado neste estudo corresponde a uma plataforma equipada com um mancal a ar aerostático axial<sup>[1]</sup>, conforme mostra a fig.1, sobre a qual uma placa esférica de acrílico, projetada em **CAD/SolidWorks**, flutua sob uma película de ar, possibilitando simulações de movimentos de rotação em três graus de liberdade. O modelo idealizado neste estudo, portanto, corresponde a um simulador espacial de rotação, com três graus de liberdade. A placa esférica é composta de dois hemisférios de 3 mm de espessura e de 526 mm de diâmetro externo, dentro da qual é instalada uma maquete de formato cúbico composta por 17 hastes cilíndricas delgadas, onde são inseridas 8 massas para o ajuste do CG. As hastes são cilindros de aço e as massas de simulação correspondem a placas cilíndricas de aço. As massas podem ser deslocadas ao longo da haste, para possibilitar simulações com diferentes configurações de matriz de inércia e CG, conforme mostra a fig.2. Para a aplicação do método dos mínimos quadrados, foi adotado neste trabalho o programa em **Matlab** desenvolvido por Healy<sup>[5]</sup> e utilizado também por Dam<sup>[3]</sup>.

## 2. Objetivo

O objetivo deste trabalho é identificar as propriedades de massa de um simulador espacial desenvolvido em CAD/SolidWorks, através de simulações criadas pelo Simulink, cujos resultados são transferidos ao MatLab, para que sejam trabalhados utilizando-se o método de mínimos quadrados, e assim seja possível fazer a identificação dessas propriedades e compará-las com as do projeto CAD para verificação e convergência dos dados.

### 3. Materiais e Métodos

Abaixo está o Simulador, mencionado anteriormente na introdução, no qual a esfera acrílica (Simulador) está apoiada sobre um mancal a ar.



Fig. 1 – Simulador espacial

O Simulador foi desenvolvido no programa CAD, Solidworks, conforme mostram as fig. 2 e 3, e obteve-se as seguintes propriedades de massa do simulador total.

Massa Total: 16.55 kg

Coordenadas do CG:

$$CG = \begin{Bmatrix} 0.0182 \\ 0.0281 \\ 0.0484 \end{Bmatrix} mm$$

Matriz de Inércia:

$$[I] = \begin{bmatrix} 0,4234 & 0 & -0,0017 \\ 0 & 0,4569 & 0,0087 \\ -0,0017 & 0,0087 & 0,4103 \end{bmatrix} kg.m^2$$

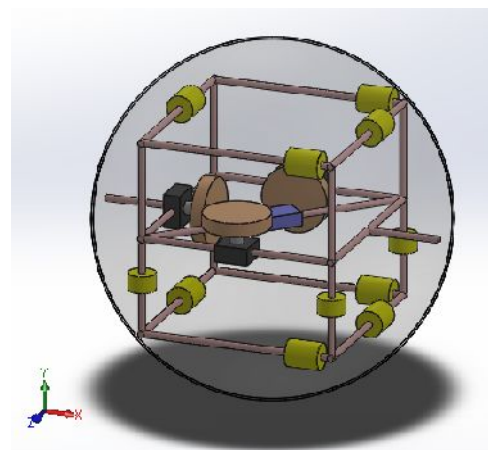
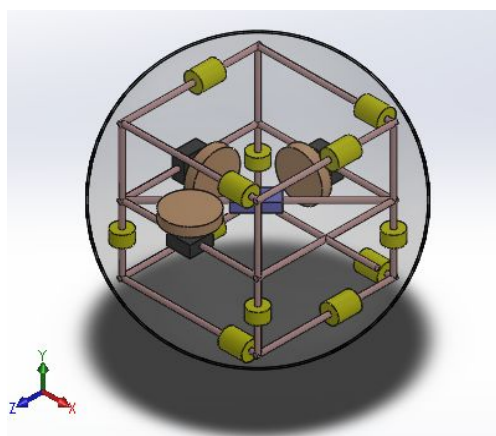


Fig. 2 – Simulador Vista Isométrica

Fig. 3 – Simulador Vista Dimétrica

E as seguintes propriedades das rodas de reação, fig. 4.

Massa Total: 1.23 kg

Coordenadas do CG:

$$CG = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} mm$$

Matriz de Inércia:

$$[I] = \begin{bmatrix} 0,0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0015 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0008 \end{bmatrix} kg.m^2$$

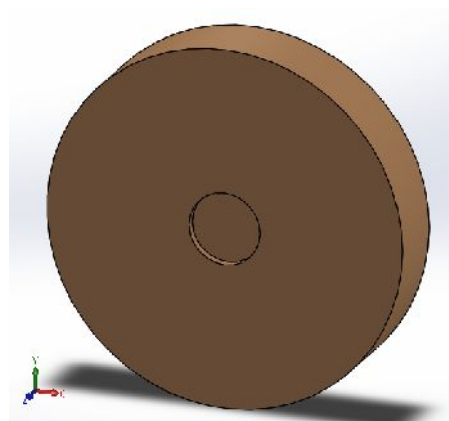


Fig. 4 – Roda de Reação Vista Dimétrica

Os parâmetros a serem identificados, foram dispostos nas seguintes forma matricial e de vetor.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}; \quad CG = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

### 3.1 Equações

A equação do movimento do simulador se expressa a partir da seguinte expressão <sup>[3]</sup>:

$$\Gamma = \dot{\vec{H}} = I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge I\vec{\omega} + \dot{\vec{h}}_{Rr} \quad (2)$$

Onde:

$\dot{\vec{H}}$  = torque = derivada, em relação ao tempo, do momento angular de todo o experimento, quer dizer, do sistema móvel;

$\Gamma$  = torque, resultante pela ação da gravidade sobre o cg deslocado do centro geométrico do simulador;

$\vec{\omega}$  = velocidade angular generalizada do dispositivo móvel (placa esférica com componentes);

$\dot{\vec{\omega}}$  = aceleração angular do experimento;

$I$  = matriz de inércia do experimento;

$\dot{\vec{h}}_{Rr}$  = torque, derivada do momento angular, das rodas de reação;

$$\dot{\vec{h}}_{Rr} = \sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} I_1^{Rr_i} \cdot \dot{\omega}_{Rr_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{\omega} \wedge \begin{bmatrix} I_1^{Rr_i} \cdot \dot{\omega}_{Rr_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

Onde:

$I_1^{Rr_i}$  = momento de inércia polar das rodas de reação, onde há a ação do torque. Os momentos de inércia laterais das rodas são considerados desprezíveis, neste trabalho.

As rodas de reação funcionam como atuadores, que com torques aplicados por cada motor, que correspondem à entrada no programa, procuram restaurar a atitude anterior alterada pela ação da gravidade, devido ao deslocamento do cg. Ao se provocar uma excentricidade do cg, uma vez que o dispositivo encontrava-se balanceado e imóvel, esse se desloca até uma nova posição de estabilidade, novamente em repouso. Ao se acionar as rodas de reação, o dispositivo deverá retornar à posição anterior, e para isso segue manobras através dos ângulos de Euler. Esses compõem as matrizes de rotação, do sistema de coordenadas de referência do corpo ao sistema de coordenadas inercial, em muitos casos, em estudos e procedimentos de controle de satélites, são substituídos

por *quaternions*, para se evitar singularidade<sup>[3]</sup>. As velocidades resultantes do corpo, correspondentes às saídas no programa de identificação, cujas derivadas geram os ângulos de Euler das manobras, são aplicadas nas equações do movimento e, manipuladas adequadamente<sup>[3]</sup>, geram o modelo de mínimos quadrados, quando nas equações da dinâmica produtos vetoriais e escalares permitem o desacoplamento dos parâmetros de propriedades de massa das velocidades e acelerações.

$$A \cdot x - T = 0 \quad (4)$$

A eq. (5) define os componentes do tensor de inércia e do torque de gravidade quando o centro de gravidade do simulador está fora do centro de rotação:

$$x = [I_{xx} \quad I_{xy} \quad I_{xz} \quad I_{yy} \quad I_{yz} \quad I_{zz} \quad mgx \quad mgy \quad mgz] \quad (5)$$

Cada termo da estimativa por mínimos quadrados pode ser definido como:  $A \cdot x - T = 0$

$$A \cdot x = I \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge I \vec{\omega} - \vec{r} \wedge R_E m \vec{g} \quad (6)$$

e T:

$$T = \sum_{i=1}^3 \left( \begin{bmatrix} I_1^{Rr_i} \cdot \dot{\omega}_{Rr_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \vec{\omega} \wedge \begin{bmatrix} I_1^{Rr_i} \cdot \dot{\omega}_{Rr_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (7)$$

Onde  $r$  é a distância e a excentricidade do CG e  $R_E$  é a matriz de rotação de Euler que é obtida por integração no programa de identificação desenvolvido no **Matlab**. A eq. (7)

tem a mesma forma da eq. (3), pois,  $\dot{\vec{h}}_{Rr} = T$ , a variação, no tempo, do momento angular das rodas de reação é igual ao torque aplicado pelos seus motores elétricos.

A partir dessas equações, a solução por mínimos quadrados é obtida através da pseudo-inversa<sup>[3]</sup>:

$$x = ((A^T A)^{-1} A^T)T \quad (8)$$

Onde<sup>[4]</sup>:

$$A = f(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \cos\theta_1, \cos\theta_2, \sin\theta_1, \sin\theta_2) \quad (9)$$

$$T = f(\omega_x, \omega_y, \omega_z, I_1^{Rx1}, I_1^{Ry2}, I_1^{Rz3}, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (10)$$

A e T são atualizados a cada passo da iteração, que tem o tamanho dos pontos do período de tempo.

Para a implantação do método selecionado, um pequeno deslocamento do centro de gravidade teve que ser produzido para que um torque gravitacional atuasse sobre a estrutura, sendo assim possível a identificação também do centro de gravidade.

#### 4. Resultados

Nas simulações anteriores descritas no Relatório Parcial, manobras em três eixos simultâneos não convergiam quando o tempo de manobra se restringia a alguns minutos, porém ao se alterar ligeiramente o coeficiente de amortecimento, amplitude e frequência, foi possível obter resultados convergentes em manobras curtas de até 180 segundos. Entretanto, só foi possível identificar os valores dos momentos e produtos de inércia, sendo que as coordenadas do deslocamento do cg, excentricidade do cg, não convergiram para os valores do projeto CAD e além disso com valores muito diversos entre uma dada simulação e outra. Os resultados da matriz de inércia se mostraram confiáveis, uma vez que foram aplicados diferentes torques em diferentes períodos de tempo, obtendo-se uma faixa de erro aceitável de aproximadamente 0,83% para os momentos de inércia, e de 2,20% para os produtos de inércia. Foram realizadas 10 simulações para análise dos resultados, conforme mostram as tabelas 1 e 2.

Parâmetro	CAD/SW	Sim.01	Sim.02	Sim.03	Sim.04	Sim.05
Ixx (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4234</b>	0,4268	0,4268	0,4267	0,4272	0,4268
Ixy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0000</b>	0,0014	0,0012	0,0015	0,0011	0,0012
Ixz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0017</b>	0,0017	0,0018	0,0016	0,0016	0,0018
Iyy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4569</b>	0,4596	0,4598	0,4595	0,4599	0,4597
Iyz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0087</b>	0,0091	0,0091	0,0091	0,0090	0,0091
Izz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4103</b>	0,4148	0,4147	0,4149	0,4148	0,4147
CGx (mm)	<b>0,0182</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CGy (mm)	<b>0,0281</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CGz (mm)	<b>0,0484</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tab. 1 – Simulações 01 a 05

Parâmetro	CAD/SW	Sim.06	Sim.07	Sim.08	Sim.09	Sim.10
Ixx (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4234</b>	0,4273	0,4268	0,4271	0,4269	0,4265
Ixy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0000</b>	0,0008	0,0013	0,0010	0,0011	0,0014
Ixz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0017</b>	0,0017	0,0018	0,0017	0,0017	0,0019
Iyy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4569</b>	0,4601	0,4598	0,4600	0,4599	0,4596
Iyz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0087</b>	0,0091	0,0092	0,0090	0,0091	0,0092
Izz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4103</b>	0,4147	0,4147	0,4147	0,4147	0,4147
CGx (mm)	<b>0,0182</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CGy (mm)	<b>0,0281</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CGz (mm)	<b>0,0484</b>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tab. 2 – Simulações 06 a 10

Na tabela 3 podemos conferir a média dos resultados e o erro.

Parâmetro	CAD/SW	Média 10 Sim.	Erro (%)
Ixx (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4234</b>	0,4268	0,80
Ixy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0000</b>	-	-
Ixz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0017</b>	0,0017	0,00
Iyy (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4569</b>	0,4598	0,63
Iyz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,0087</b>	0,0091	4,39
Izz (kg.m <sup>2</sup> )	<b>0,4103</b>	0,4147	1,06

Tab. 3 – Média Simulações



#### 4. Conclusões

As simulações descritas neste relatório obtiveram os valores de momentos e produtos de inércia quando aplicadas rotações simultâneas nos três eixos de aplicação de torque, ou seja, nas três rodas de reação. Dessa forma, o objetivo deste trabalho foi alcançado para a identificação da matriz de inércia. Não foi obtida a identificação das coordenadas do deslocamento do cg do centro geométrico, a excentricidade do cg.. Seus dados finais não convergiram para os valores do projeto CAD, após várias simulações com e sem aplicação de ruído branco aos sinais de velocidade angular do corpo. Foram feitas novas configurações de excentricidade, através do deslocamento dos cilindros ao longo das hastes, em um procedimento de balanceamento fino de massa [5], e alterados simultânea e ligeiramente vários dos dados dinâmicos do dispositivo móvel do simulador, só se obtendo melhora na precisão dos produtos de inércia. O aumento da excentricidade do cg, com o objetivo de se verificar a convergência desses dados, demonstrou a tendência à convergência com erro constante, mas não os valores precisos, como em [5]. Assim sendo, apenas os valores do tensor de inércia foram identificados com razoável precisão, deixando os testes para identificação dos dados de cg para trabalhos futuros, considerando-se que novas simulações serão feitas para solucionar o problema de sinal fraco do vetor de cg. Nesse sentido, vão ser utilizados métodos que utilizarão dados de entrada de velocidade e aceleração de translação, para a identificação dos dados de cg, e novas simulações e testes vão continuar sendo feitos com os mesmos programa utilizados neste trabalho, porém com a introdução de novos procedimentos, como relatados em [4]. Como alternativa, será desenvolvido um algoritmo dedicado à identificação exclusiva da excentricidade do cg, como o descrito em [11].

## 5. Referências

- [1] **Cunha, W.P.**, Sistema para Medição de Propriedades de Massa, Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, SP, 1993.
- [2] **Amaral, F.J.P., Cunha, W.P.**, Relatório Final de Iniciação Científica, PIBIC/IAE/CNPq, Agosto de 2015, Instituto de Aeronáutica e Espaço, IAE, Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespaciais, São José dos Campos, SP, 2015.
- [3] **Dam, L.,H.**, Applied Mass Properties Identification Method to the Cal Poly's Spacecraft Simulator, Master's Thesis, Dept. Aerospace Engineering, Cal Poly State University, San Luis Obispo, CA, 2014
- [4] **Berkovitz, D., Miller, D.**, System Characterization and Online Mass Property Identification of the SPHERES Formation Flight Testbed, Master's Thesis, Department of Astronautics and Aeronautics, M.I.T, Cambridge, USA, 2007;
- [5] **Healy, Patrick B.**, Mass Property System Identification of a Spacecraft Simulator Master's Thesis, Dept. Aerospace Engineering, Cal Poly State University, San Luis Obispo, CA, 2006.
- [6] **Lee, A., Y., Wertz, J.,A.**, In-Flight Estimation of the Cassini Spacecraft's Inertia Tensor, J. Spacecraft, Vol. 39, No. 1:ENGINEERINGNOTES,/October/2001. Copyright c° 2001 by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- [7] **Keim, J , A., Shields, J.,F.**, Spacecraft Inertia Estimation Via Constrained Least Squares, Jet Propulsion Laboratory, Caltech, 2006.
- [8] **Curtis, H.**, Orbital Mechanics for Engineering Students, Embry-Riddle Aeronautical University, Daytona Beach, Florida, 2005.
- [9] **Sniper, R.,E.**, Attitude Control of a Satellite Simulator Using Reaction Wheels and PID controllers, Master's Thesis, Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, USA, 2010.
- [10] **Hassam, H.**, Design and Construction of a Nano Satellite Simulation with Centralized Mass using Controlled Actuators, Master's Thesis, Luleå University of Technology, Sweden, Würsburg University, Germany, 2013.
- [11] **Ma, O., Dan, H.**, On-Orbit Identification of Inertia Properties of a Spacecraft using Robotic Technology, New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico, USA, 2006.